Вариант 9.

1. Для данного определителя $\begin{vmatrix} 6 & 2 & -10 & 4 \\ -5 & -7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix}$ найти дополнительный минор элемента a_{23}.

Решение.

Минором M_{ij} *элемента* a_{ij} матрицы *n*-го порядка называется определитель матрицы *(n-1)*-го порядка, полученный из матрицы *A* вычеркиванием *i*-й строки и *j*-го столбца.

Вычислим минор M_{23}

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 6 \cdot 4 \cdot (-5) + 2 \cdot 0 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) \cdot 3 - 3 \cdot 4 \cdot 4 - 0 \cdot (-2) \cdot 6 - 2 \cdot 2 \cdot (-5) =$$

$$= -120 + 0 - 12 - 48 - 0 + 20 = -160.$$

Ответ: -160.

2. Найти матрицы $[AB]$, $[BA]$, $\left[A^{-1}\right]$, если $[A]=\begin{bmatrix}3 & -7 & 2\\ 1 & -8 & 3\\ 4 & -2 & 3\end{bmatrix}$, $[B]=\begin{bmatrix}0 & 5 & -3\\ 2 & 4 & 1\\ 2 & 1 & -5\end{bmatrix}$.

Решение.

1) Находим $[AB]$:

$$[AB]=\begin{bmatrix}3 & -7 & 2\\ 1 & -8 & 3\\ 4 & -2 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 5 & -3\\ 2 & 4 & 1\\ 2 & 1 & -5\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}3\cdot 0+(-7)\cdot 2+2\cdot 2 & 3\cdot 5+(-7)\cdot 4+2\cdot 1 & 3\cdot(-3)+(-7)\cdot 1+2\cdot(-5)\\ 1\cdot 0+(-8)\cdot 2+3\cdot 2 & 1\cdot 5+(-8)\cdot 4+3\cdot 1 & 1\cdot(-3)+(-8)\cdot 1+3\cdot(-5)\\ 4\cdot 0+(-2)\cdot 2+3\cdot 2 & 4\cdot 5+(-2)\cdot 4+3\cdot 1 & 4\cdot(-3)+(-2)\cdot 1+3\cdot(-5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10 & 9 & -26\\ -10 & -24 & -26\\ 2 & 15 & -29\end{bmatrix}.$$

2) Находим $[BA]$:

$$[BA]=\begin{bmatrix}0 & 5 & -3\\ 2 & 4 & 1\\ 2 & 1 & -5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & -7 & 2\\ 1 & -8 & 3\\ 4 & -2 & 3\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}0\cdot 3+5\cdot 1+(-3)\cdot 4 & 0\cdot(-7)+5\cdot(-8)+(-3)\cdot(-2) & 0\cdot 2+5\cdot 3+(-3)\cdot 3\\ 2\cdot 3+4\cdot 1+1\cdot 4 & 2\cdot(-7)+4\cdot(-8)+1\cdot(-2) & 2\cdot 2+4\cdot 3+1\cdot 3\\ 2\cdot 3+1\cdot 1+(-5)\cdot 4 & 2\cdot(-7)+1\cdot(-8)+(-5)\cdot(-2) & 2\cdot 2+1\cdot 3+(-5)\cdot 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -34 & 6\\ 14 & -48 & 19\\ -13 & -12 & -8\end{bmatrix}.$$

3) Найдем матрицу $\left[A^{-1}\right]$ по формуле

$$\left[A^{-1}\right]=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix},$$

где $|A|=\begin{vmatrix}3 & -7 & 2\\ 1 & -8 & 3\\ 4 & -2 & 3\end{vmatrix}=-72-4-84-(-64)-(-18)-(-21)=-57$,

$\boldsymbol{A_{ij}}$ - алгебраическое дополнение к элементу $\boldsymbol{a_{ij}}$ $(\boldsymbol{i}=\overline{1,3},\ \boldsymbol{j}=\overline{1,3})$.

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-8 & 3\\ -2 & 3\end{vmatrix}=-24+6=-18,\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-7 & 2\\ -2 & 3\end{vmatrix}=17,\quad A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-7 & 2\\ -8 & 3\end{vmatrix}=-5,$

$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 3\end{vmatrix}=9,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{vmatrix}=1,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-7,$

$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -8\\ 4 & -2\end{vmatrix}=30,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & -7\\ 4 & -8\end{vmatrix}=-4,\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & -7\\ 1 & -8\end{vmatrix}=-17.$

Обратная матрица имеет вид: $\left[A^{-1}\right]=-\frac{1}{57}\begin{bmatrix}-18 & 17 & -5\\ 9 & 1 & -7\\ 30 & -4 & -17\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{6}{19} & -\frac{17}{57} & \frac{5}{57}\\ -\frac{3}{19} & \frac{1}{57} & \frac{7}{57}\\ -\frac{10}{19} & \frac{4}{57} & \frac{17}{57}\end{bmatrix}.$

Ответ: 1) $[AB]=\begin{bmatrix} -10 & 9 & -26 \\ -10 & -24 & -26 \\ 2 & 15 & -29 \end{bmatrix}$, 2) $[BA]=\begin{bmatrix} 3 & -34 & 6 \\ 14 & -48 & 19 \\ -13 & -12 & -8 \end{bmatrix}$,

3) $[A^{-1}]=\begin{bmatrix} \frac{6}{19} & -\frac{17}{57} & \frac{5}{57} \\ -\frac{3}{19} & \frac{1}{57} & \frac{7}{57} \\ -\frac{10}{19} & \frac{4}{57} & \frac{17}{57} \end{bmatrix}$.

3. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее по правилу Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ -3x_1 + 5x_3 + 6x_3 = 36, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19. \end{cases}$$

Решение.

Совместность данной системы проверим, используя теорему Крамера, а именно: если главный определитель отличен от нуля, то система имеет единственное решение.

Находим главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 6 \\ 1 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot 5\cdot(-2)+(-3)\cdot(-4)\cdot 1+1\cdot 6\cdot 1-1\cdot 5\cdot 1-(-4)\cdot 6\cdot 3-(-3)\cdot 1\cdot(-2)=$$

$=-30+12+6-5+72-6=49\neq 0$, т.к. главный определитель системы не равен нулю, то система совместна и имеет единственное решение.

Решим заданную систему по формулам Крамера $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta},\quad x_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}$, где

$\Delta-$ главный определитель системы, составленный из коэффициентов при неизвестных;

$\Delta_i (i=\overline{1,3})-$ определитель системы, полученный путем замены i-го столбца главного определителя системы столбцом свободных членов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 6 \\ 1 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot 5\cdot(-2)+(-3)\cdot(-4)\cdot 1+1\cdot 6\cdot 1-1\cdot 5\cdot 1-(-4)\cdot 6\cdot 3-(-3)\cdot 1\cdot(-2)=$$

$=-30+12+6-5+72-6=49$,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 36 & 5 & 6 \\ -19 & -4 & -2 \end{vmatrix} = (-4)\cdot 5\cdot(-2)+36\cdot(-4)\cdot 1+1\cdot 6\cdot(-19)-(-19)\cdot 5\cdot 1-(-4)\cdot 6\cdot(-4)-$$

$-36\cdot 1\cdot(-2)=40-144-114+95-96+72=-147;$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -3 & 36 & 6 \\ 1 & -19 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot 36\cdot(-2)+(-3)\cdot(-19)\cdot 1+(-4)\cdot 6\cdot 1-1\cdot 36\cdot 1-(-19)\cdot 6\cdot 3-(-3)\cdot(-4)\cdot(-2)=$$

$=-216+57-24-36+342+24=147;$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -3 & 5 & 36 \\ 1 & -4 & -19 \end{vmatrix} = 3\cdot 5\cdot(-19)+(-3)\cdot(-4)\cdot(-4)+1\cdot 36\cdot 1-1\cdot 5\cdot(-4)-(-4)\cdot 36\cdot 3-(-3)\cdot 1\cdot(-19)=$$

$=-285-48+36+20+432-57=98.$

Находим решение системы $x_1=\dfrac{-147}{49}=-3, x_2=\dfrac{147}{49}=3, x_3=\dfrac{98}{49}=2.$

Ответ: $x_1=-3, x_2=3, x_3=2.$

4. Доказать, что векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

$\vec{a}=\{5;3;2\}$, $\vec{b}=\{2;-5;1\}$, $\vec{c}=\{-7;4;-4\}$, $\vec{d}=\{36;1;15\}$.

Решение.

Векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ образуют базис, если они линейно независимы. Проверим выполнение этого условия с использованием смешанного произведения векторов, которое в координатной форме для векторов $\vec{a}(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}(b_1,\ b_2,\ b_3)$, $\vec{c}(c_1,\ c_2,\ c_3)$ определяется формулой

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-(a_3b_2c_1+a_2b_1c_3+a_1b_3c_2)$$

В данном случае,

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \\ -7 & 4 & -3 \end{vmatrix}=5\cdot(-5)\cdot(-3)+2\cdot4\cdot2+3\cdot1\cdot(-7)-(-7)\cdot(-5)\cdot2-$$

$$-4\cdot1\cdot5-2\cdot3\cdot(-3)=75+16-21-70-20+18=-2\neq0$$

Так как $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\neq0$, то данные векторы образуют базис.

Для разложения вектора $\vec{d}$ по базису $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ составим векторное равенство

$$\vec{d}=d_1\vec{a}+d_2\vec{b}+d_3\vec{c}$$

или в координатной форме

$$d_1\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}+d_2\begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix}+d_3\begin{pmatrix}-7\\4\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}36\\1\\15\end{pmatrix}.$$

Задача сведена к решению системы

$$\begin{cases}5d_1+2d_2-7d_3=36\\3d_1-5d_2+4d_3=1\\2d_1+d_2-3d_3=15\end{cases}$$

по формулам Крамера.

Матрица коэффициентов и матрица-столбец свободных членов данной системы: $A=\begin{bmatrix}5 & 2 & -7\\3 & -5 & 4\\2 & 1 & -3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}36\\1\\15\end{bmatrix}$.

Определитель матрицы коэффициентов

$$\Delta=\begin{vmatrix}5 & 2 & -7\\3 & -5 & 4\\2 & 1 & -3\end{vmatrix}=75-21+16-70-20+18=-2\neq0$$

поэтому систему уравнений можно решить по формулам Крамера: $d_j=\dfrac{\Delta_j}{\Delta_3}$, $j=\overline{1,3}$, где определители $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3$ получаются из Δ_3 заменой соответствующего столбца столбцом свободных членов.

Так как

$$\Delta_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 36 & 2 & -7 \\ 1 & -5 & 4 \\ 15 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 540 - 7 + 120 - 525 - 144 + 6 = -10 \text{, то } d_1 = \frac{-10}{-2} = 5$$

$$\Delta_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 5 & 36 & -7 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 15 & -3 \end{vmatrix} = -15 - 315 + 288 + 14 - 300 + 324 = -4 \text{, то } d_2 = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$\Delta_3^{(3)} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 36 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 15 \end{vmatrix} = -375 + 108 + 4 + 360 - 5 - 90 = 2 \text{, то } d_3 = \frac{2}{-2} = -1$$

Таким образом, в базисе $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ вектор $\vec{d}$ будет иметь координаты $\vec{d} = (5; 2; -1)$.

Ответ: $\vec{d} = (5; 2; -1)$.

5. Вершины пирамиды находятся в точках A(-7,-6,-5), B(5,1,-3), C(8,-4,0), D(3,4,−7). Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной из вершины A.

Решение.

Объем пирамиды находится по формуле:

$V=\frac{1}{6}\cdot\left|\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right)\right|$, где $\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right)$– смешанное произведение векторов, определяемое по формуле:

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

Найдем координаты векторов, используя формулу: $\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\right)$, где $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ и $B\left(x_B;y_B;z_B\right)$:

$\overrightarrow{AB}=\left(5-(-7);1-(-6);-3-(-5)\right)=(12;7;2)$,

$\overrightarrow{AC}=\left(8-(-7);-4-(-6);0-(-5)\right)=(15;2;5)$,

$\overrightarrow{AD}=\left(3-(-7);4-(-6);-7-(-5)\right)=(10;10;-2)$.

$$\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}12 & 7 & 2\\ 15 & 2 & 5\\ 10 & 10 & -2\end{vmatrix}=-48+300+350-40-600+210=172.$$

$V=\frac{1}{6}\cdot 172=\frac{86}{3}ед^3.$

Для нахождения длины высоты, опущенной из вершины A на грань BCD найдем сначала площадь грани BCD.

$\overrightarrow{BC}=\left(8-5;-4-1;0-(-3)\right)=(3;-5;3)$,

$\overrightarrow{BD}=\left(3-5;4-1;-7-(-3)\right)=(-2;3;-4)$.

$$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -5 & 3\\ -2 & 3 & -4\end{vmatrix}=11\vec{i}+18\vec{j}-\vec{k}.$$

$\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{11^2+18^2+(-1)^2}=\sqrt{446}$

$S_{осн}=\frac{\sqrt{446}}{2}$ (ед^2)

Т.к. $V=\frac{S_{осн}\cdot h}{3}$; $\quad h=\frac{3V}{S_{осн}}=\frac{3\cdot\frac{86}{3}}{\frac{\sqrt{446}}{2}}=\frac{172}{\sqrt{446}}$ (ед).

Ответ: объем пирамиды $V=\frac{86}{3}ед^3$, длина высоты $h=\frac{172}{\sqrt{446}}$ (ед).

6. Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3. $M_1(3;10;-1)$, $M_2(-2;3;-5)$, $M_3(-6;0;-3)$, $M_0(-6;7;-10)$.

Решение.

Расстояние от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости находится по формуле:

$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, где $Ax+By+Cz+D=0$ - уравнение данной плоскости.

Найдем уравнение плоскости проходящей через точки M_1, M_2, M_3.

Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через три точки $P_1(x_1;y_1;z_1)$, $P_2(x_2;y_2;z_2)$, $P_3(x_3;y_3;z_3)$

$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_1 & \boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_1 \\ \boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{y}_1 & \boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{x}_3-\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{y}_3-\boldsymbol{y}_1 & \boldsymbol{z}_3-\boldsymbol{z}_1 \end{vmatrix}=0$ Для нашей задачи имеем: $\begin{vmatrix} x-3 & y-10 & z+1 \\ -2-3 & 3-10 & -5+1 \\ -6-3 & 0-10 & -3+1 \end{vmatrix}=0,$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-10 & z+1 \\ -5 & -7 & -4 \\ -9 & -10 & -2 \end{vmatrix}=0, \qquad -26\cdot(x-3)+26\cdot(y-10)-13\cdot(z+1)=0$$

$2x-2y+z+15=0$ - уравнение плоскости проходящей через точки M_1, M_2, M_3.

Тогда расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3: $d=\dfrac{|2\cdot(-6)+(-2)\cdot 7+1\cdot(-10)+15|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\dfrac{|-12-14-10+15|}{\sqrt{4+4+1}}=\dfrac{21}{\sqrt{9}}=7.$

Ответ: 7.

7. Написать канонические уравнения прямой $4x+y-3z+2=0$, $2x-y+z-8=0$.

Решение.

Канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ параллельно вектору $\vec{s}=(m;n;p)$ имеют вид: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$.

Перейдем к канонической форме уравнения прямой. Находим точку на данной прямой. Пусть $x=1$, тогда $y=-6, z=0$. Тогда $M_0(1;-6;0)$

Направляющий вектор прямой найдем из векторного произведения нормальных векторов пересекаемых плоскостей, т.е. $\overrightarrow{n_1}=(4;1;-3)$, $\overrightarrow{n_2}=(2;-1;1)$:

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 1 & -3\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=(1-3)\cdot\vec{i}-(4-(-6))\cdot\vec{j}+(-4-2)\cdot\vec{k}=$$

$$=-2\vec{i}-10\vec{j}-6\vec{k}.$$

Т.е. $\vec{s}=(-2;-10;-6)$.

Получаем канонические уравнения прямой: $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+6}{-10}=\dfrac{z-0}{-6}\Rightarrow\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+6}{5}=\dfrac{z}{3}$.

Ответ: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+6}{5}=\dfrac{z}{3}$.

8. Найти точку пересечения прямой, заданной каноническими уравнениями, и плоскости.

$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-1}{-1}; 3x-2y-4z-8=0.$

Решение.

Запишем уравнение прямой, заданной каноническими уравнениями, в параметрической форме:

$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-1}{-1}.$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{1}=t \\ \frac{y+1}{0}=t \\ \frac{z-1}{-1}=t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=t+1 \\ y=-1 \\ z=-t+1 \end{cases}$$

Подставляя эти выражения для x, y, z в уравнение плоскости, находим значение параметра t , при котором происходит пересечение прямой и плоскости:
$3\cdot(t+1)-2\cdot(-1)-4\cdot(-t+1)-8=0 \Rightarrow 7t-7=0 \Rightarrow t_0=1.$

Подставляя в параметрические уравнения прямой найденное значение $t_0=1$, получаем

$$\begin{cases} x=1+1=2, \\ y=-1, \\ z=-1+1=0. \end{cases}$$

Таким образом, точка пересечения прямой и плоскости есть $M_0(2;-1;0)$.

Ответ: $M_0(2;-1;0)$.

9. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-2x-1}{-x^2-x+2}$.

Решение.

Непосредственная подстановка предельного значения аргумента x=1 приводит к неопределенности $\dfrac{0}{0}$. Чтобы раскрыть эту неопределенность, разложим числитель и знаменатель на множители.

Т.к. $x\to1$, но не совпадает со своим предельным значением, то $x-1\neq0$:

$$\lim_{x\to1}\frac{3x^2-2x-1}{-x^2-x+2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(3x+1)}{-(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to1}\frac{3x+1}{-(x+2)}=\frac{3\cdot1+1}{-(1+2)}=\frac{4}{-3}=-\frac{4}{3}..$$

Ответ: $-\dfrac{4}{3}$.

10. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+3x+1}{2x^2-x+10}$

Решение.

В этом случае имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Т.к. в числителе и знаменателе стоят многочлены, то для раскрытия неопределенности необходимо числитель и знаменатель разделить на наивысшую степень x из слагаемых многочленов числителя и знаменателя, т.е. на x^2, а затем перейти к пределу:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+3x+1}{2x^2-x+10}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(-1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{10}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{10}{x^2}}=$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\frac{c}{x^n}=0,\textit{где } c\in R,\ c\neq 0,\ n\in R^+\right]=\frac{-1+0+0}{2-0+0}=-\frac{1}{2}.$$

Ответ: $-\dfrac{1}{2}$.

11. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$.

Решение.

Под знаком предела есть иррациональность в числителе дроби. Непосредственная подстановка предельного значения аргумента x= 5 приводит к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$.

Чтобы раскрыть эту неопределенность, достаточно числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, домножить на выражение, сопряженное числителю дроби:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+6}\right)}{(x-5)(2x+3)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+6}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(2x+1)-(x+6)}{(x-5)(2x+3)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+6}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{(x-5)(2x+3)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+6}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{1}{(2x+3)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+6}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{(2\cdot 5+3)\left(\sqrt{2\cdot 5+1}+\sqrt{5+6}\right)}=\frac{1}{13\cdot 2\sqrt{11}}=\frac{1}{26\sqrt{11}}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{26\sqrt{11}}$.

12. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{tg 3x}$.

Решение.

При $x \to 0$ числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю, следовательно имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Воспользуемся заменой на эквивалентную бесконечно малую. При $x \to 0$, $e^{2x} - 1 \sim 2x$, $tg 3x \sim 3x$. Тогда:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{tg 3x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{4x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{4x}=\left(1\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{4x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{3}}\right]^{\frac{12x}{2x-3}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{12x}{2x-3}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x}{2x-3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12}{2-\frac{3}{x}}}=e^{6}.$$

При вычислении этого предела использована обобщенная формула второго замечательного предела $\lim\limits_{f(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$ и теорема о пределе показательно-степенной функции: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$, где x_0 конечная или бесконечно удаленная точка.

Ответ: e^{6}.

14. Составить уравнение нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0.

$y = 2x^2 - 3x + 1$, $x_0 = 1$.

Решение.

Уравнение нормали: $y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$

Находим $y_0 = f(x_0) = f(1) = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 0$.

Находим производную функции и вычисляем ее значение при $x_0 = 1$:

$y' = \left(2x^2 - 3x + 1\right)' = 4x - 3.$

$f'(x_0) = f'(1) = 4 \cdot 1 - 3 = 1..$

Тогда уравнение нормали:

$y - 0 = -\dfrac{1}{1} \cdot (x - 1) \Rightarrow y = -x + 1$.

Ответ: $y = -x + 1$.

15. Найти дифференциал функции в точке с абсциссой x_0.

$y=\ln\left|\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x}\right|,\ x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

Решение.

Дифференциал функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 находится по формуле $dy=y'(x_0)dx$.

Находим производную функции $y=\ln\left|\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x}\right|$.

Применим правила дифференцирования суммы и сложной функции:

$$y'=\left(\ln\left|\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x}\right|\right)'=\frac{1}{\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x}}\cdot\left(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x}\right)'=$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x}}\cdot\left(2\cos x\cdot(\cos x)'+\frac{1}{2\sqrt{1+\cos^4 x}}\cdot\left(1+\cos^4 x\right)'\right)=$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x}}\cdot\left(2\cos x\cdot(-\sin x)+\frac{4\cos^3 x}{2\sqrt{1+\cos^4 x}}\cdot(\cos x)'\right)=$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x}}\cdot\left(2\cos x\cdot(-\sin x)+\frac{2\cos^3 x\cdot(-\sin x)}{\sqrt{1+\cos^4 x}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x}}\cdot\frac{-2\cos x\sin x\left(\sqrt{1+\cos^4 x}+\cos^2 x\right)}{\sqrt{1+\cos^4 x}}=-\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}.$$

В заданной точке: $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\sin\left(2\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{1+\cos^4\dfrac{\pi}{2}}}=0.$ Тогда дифференциал: $dy=0dx$.

Ответ: $dy=0dx$.